

Содержание

Глава 1. Условия задач	3
Задание 17 (Легкое №1)	3
Задание 17 (Легкое №2)	3
Задание 17 (Легкое №3)	3
Задание 17 (Легкое №4)	3
Задание 17 (Легкое №5)	3
Задание 17 (Легкое №6)	3
Задание 17 (Легкое №7)	3
Задание 17 (Легкое №8)	4
Задание 17 (№1029)	4
Задание 17 (№1030)	4
Задание 17 (№1031)	4
Задание 17 (№1032)	4
Задание 17 (№1033)	5
Задание 17 (№1027)	5
Задание 17 (№1028)	5
Задание 17 (Ященко №1)	5
Задание 17 (Ященко №2)	6
Задание 17 (Ященко №3)	6
Задание 17 (Дополнительное №1)	6
Задание 17 (Дополнительное №2)	6
Задание 17 (Дополнительное №3)	7

Глава 2. Условия и решения	8
Задание 17 (Легкое №1)	8
Задание 17 (Легкое №2)	10
Задание 17 (Легкое №3)	11
Задание 17 (Легкое №4)	12
Задание 17 (Легкое №5)	13
Задание 17 (Легкое №6)	14
Задание 17 (Легкое №7)	15
Задание 17 (Легкое №8)	16
Задание 17 (№1029)	17
Задание 17 (№1030)	19
Задание 17 (№1031)	20
Задание 17 (№1032)	21
Задание 17 (№1033)	22
Задание 17 (№1027)	23
Задание 17 (№1028)	24
Задание 17 (Ященко №1)	25
Задание 17 (Ященко №2)	27

Задание 17 (Ященко №3)	28
Задание 17 (Дополнительное №1)	30
Задание 17 (Дополнительное №2)	31
Задание 17 (Дополнительное №3)	32



FoxyEGE.ru



Глава 1. Условия задач

ЛЕГКИЕ ЗАДАЧИ (для тренировки)

Задание 17 (Легкое №1)

Из квадратного листа картона со стороной $a = 24$ см изготавливают открытую коробку, вырезая по углам квадраты со стороной x и загибая края. При каком значении x объём коробки будет наибольшим? Ответ дайте в сантиметрах.

Задание 17 (Легкое №2)

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 6x + 5$ на промежутке $[0, 4]$.

Задание 17 (Легкое №3)

Периметр прямоугольника равен 20 см. При каких размерах сторон площадь прямоугольника будет наибольшей?

Задание 17 (Легкое №4)

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$ на промежутке $[-1, 2]$.

Задание 17 (Легкое №5)

Сумма двух чисел равна 10. Найдите эти числа, если известно, что их произведение максимально.

Задание 17 (Легкое №6)

Найдите точку минимума функции $f(x) = x^3 - 12x + 5$.

Задание 17 (Легкое №7)

Площадь прямоугольника равна 36 см^2 . При каких размерах сторон периметр прямоугольника будет наименьшим?

Задание 17 (Легкое №8)

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ на промежутке $[0, 2]$.

ЗАДАЧИ УРОВНЯ ЕГЭ

Задание 17 (№1029)

Из квадратного листа картона со стороной $a = 30$ см изготавливают открытую коробку, вырезая по углам квадраты со стороной x и загибая края. При каком значении x объём коробки будет наибольшим? Ответ дайте в сантиметрах.

Задание 17 (№1030)

Расход топлива автомобилем на 100 км пути зависит от скорости движения по формуле $Q(v) = 0,01v + \frac{100}{v}$, где v — скорость в км/ч, Q — расход в литрах. При какой скорости расход топлива будет минимальным? Ответ дайте в км/ч.

Задание 17 (№1031)

Вода вытекает из отверстия в стенке бака. Высота бака $H = 4$ м. Отверстие расположено на высоте h от земли. Дальность струи воды определяется формулой $L = 2\sqrt{h(H-h)}$. На какой высоте h следует расположить отверстие, чтобы дальность струи была максимальной? Ответ дайте в метрах.

Задание 17 (№1032)

Источник тока с ЭДС $U = 220$ В и внутренним сопротивлением $r = 4$ Ом подключён к нагрузке с сопротивлением R . Мощность, выделяемая на нагрузке, определяется формулой $P = \frac{U^2 R}{(R + r)^2}$. При каком сопротивлении нагрузки мощность будет максимальной и чему она равна?

Задание 17 (№1033)

Периметр прямоугольного окна равен $P = 8$ м. При каких размерах сторон площадь окна будет наибольшей? Найдите эту максимальную площадь. Ответ дайте в квадратных метрах.

Задание 17 (№1027)

На заводе имеется генератор с ЭДС $\varepsilon = 50$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом. Инженер подключает к генератору нагрузку, используя реостат, чтобы установить сопротивление нагрузки R (в омах). Сила тока в цепи (в амперах) определяется законом Ома: $I = \frac{\varepsilon}{r + R}$. Тепловая мощность (в ваттах), выделяемая в нагрузке, может быть рассчитана по формуле Джоуля — Ленца: $P = I^2 R$. Какова максимальная тепловая мощность P , которая может быть выделена нагрузкой?

Задание 17 (№1028)

Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой $A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n^2\tau^2T^2}}$, где $k = 0,91$ — коэффициент, зависящий от отношения ширины корабля к длине волны, $\theta_0 = 9^\circ$ — угол наибольшего волнового склона, $T = 10$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, τ — период волны (в секундах), $n = 0$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

Задание 17 (Ященко №1)

Распределение кинетической энергии молекул гелия при тепловом движении имеет функцию плотности $f(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}}$, где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана, E — кинетическая энергия молекулы в джоулях, T — температура газа в кельвинах. Найдите значение кинетической энергии E , при котором функция плотности $f(E)$ принимает наибольшее значение, если $T = 300$ К.

Задание 17 (Ященко №2)

Если к цепи, состоящей из конденсатора, резистора и катушки индуктивности, подключить источник переменного тока, то амплитуда напряжения на катушке (в вольтах) будет подчиняться

закону $U_L(\omega) = \frac{UL\omega}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$, где U — амплитуда напряжения

на источнике тока (в вольтах), ω — частота переменного тока (в с^{-1}), L — индуктивность катушки (в генри), C — ёмкость конденсатора (в фарадах), R — сопротивление резистора (в омах). При какой частоте ω амплитуда напряжения на катушке будет наибольшей, если $U = 180 \text{ В}$, $L = 0,027 \text{ Гн}$, $C = 10^{-5} \text{ Ф}$ и $R = 20 \text{ Ом}$?

Задание 17 (Ященко №3)

Распределение скорости молекулы водорода при тепловом движении имеет функцию плотности $f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}$ (распределение Максвелла). В этой формуле v — скорость молекулы в м/с, R — универсальная газовая постоянная, $M = 0,004 \text{ кг/моль}$ — молярная масса водорода, T — температура газа в кельвинах. При каком значении скорости v функция плотности принимает наибольшее значение, если $T = 400 \text{ К}$?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ УРОВНЯ ЕГЭ

Задание 17 (Дополнительное №1)

Цилиндрический бак объёмом $V = 1000\pi \text{ л}$ должен иметь наименьшую площадь поверхности. Найдите радиус основания и высоту бака.

Задание 17 (Дополнительное №2)

Катер проходит расстояние $S = 120 \text{ км}$ по реке против течения и возвращается обратно. Скорость течения реки $u = 3 \text{ км/ч}$. При собственной скорости катера $v \text{ км/ч}$ расход топлива пропорционален квадрату скорости: $Q = kv^2$. При какой собственной скорости катера общий расход топлива на весь путь будет минимальным?

Задание 17 (Дополнительное №3)

Из круглого листа металла радиусом $R = 10$ см нужно вырезать сектор такого размера, чтобы из оставшейся части можно было свернуть конус наибольшего объёма. Найдите угол сектора в радианах.



FoxyEGE.ru



Глава 2. Условия и решения

ЛЕГКИЕ ЗАДАЧИ (для тренировки)

Задание 17 (Легкое №1)

Из квадратного листа картона со стороной $a = 24$ см изготавливают открытую коробку, вырезая по углам квадраты со стороной x и загибая края. При каком значении x объём коробки будет наибольшим? Ответ дайте в сантиметрах.

Решение:

После вырезания квадратов со стороной x из углов квадратного листа со стороной $a = 24$ см и загибания краёв получаем коробку с размерами:

- Длина основания: $a - 2x = 24 - 2x$
- Ширина основания: $a - 2x = 24 - 2x$
- Высота: x

Объём коробки вычисляется по формуле:

$$V(x) = (24 - 2x)^2 \cdot x$$

Раскрываем скобки:

$$V(x) = (576 - 96x + 4x^2) \cdot x = 4x^3 - 96x^2 + 576x$$

Находим производную функции:

$$V'(x) = 12x^2 - 192x + 576$$

Приравниваем производную к нулю для нахождения критических точек:

$$12x^2 - 192x + 576 = 0$$

Делим на 12:

$$x^2 - 16x + 48 = 0$$

Решаем квадратное уравнение:

$$D = 256 - 192 = 64, \quad \sqrt{D} = 8$$

$$x_1 = \frac{16 + 8}{2} = 12, \quad x_2 = \frac{16 - 8}{2} = 4$$

Так как x должно удовлетворять условию $0 < x < 12$ (иначе сторона основания станет неположительной), то $x = 4$ см.

Проверяем, что это точка максимума, вычисляя вторую производную:

$$V''(x) = 24x - 192$$

$$V''(4) = 96 - 192 = -96 < 0$$

Так как вторая производная отрицательна, $x = 4$ — точка максимума.

Ответ: 4 см.



FoxyEGE.ru



Задание 17 (Легкое №2)

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 6x + 5$ на промежутке $[0, 4]$.

Решение:

Находим производную функции:

$$f'(x) = 2x - 6$$

Приравниваем производную к нулю:

$$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

Точка $x = 3$ принадлежит промежутку $[0, 4]$.

Вычисляем значения функции в критической точке и на концах промежутка:

$$f(0) = 0 - 0 + 5 = 5$$

$$f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$$

$$f(4) = 16 - 24 + 5 = -3$$

Наименьшее значение: $\min\{5, -4, -3\} = -4$.

Ответ: -4 .

Задание 17 (Легкое №3)

Периметр прямоугольника равен 20 см. При каких размерах сторон площадь прямоугольника будет наибольшей?

Решение:

Обозначим стороны прямоугольника через a и b .

Периметр прямоугольника вычисляется по формуле:

$$P = 2(a + b) = 20$$

Отсюда:

$$a + b = 10 \Rightarrow b = 10 - a$$

Площадь прямоугольника:

$$S = a \cdot b = a(10 - a) = 10a - a^2$$

Находим производную функции площади:

$$S'(a) = 10 - 2a$$

Приравниваем производную к нулю:

$$10 - 2a = 0 \Rightarrow a = 5$$

Тогда $b = 10 - 5 = 5$.

Проверяем вторую производную:

$$S''(a) = -2 < 0$$

Значит, $a = 5$ — точка максимума.

Ответ: 5 см и 5 см (квадрат).

Задание 17 (Легкое №4)

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$ на промежутке $[-1, 2]$.

Решение:

Находим производную функции:

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2)$$

Приравниваем производную к нулю:

$$-3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 2$$

Обе точки принадлежат промежутку $[-1, 2]$.

Вычисляем значения функции в критических точках и на концах промежутка:

$$f(-1) = -(-1) + 3 + 2 = 1 + 3 + 2 = 6$$

$$f(0) = 0 + 0 + 2 = 2$$

$$f(2) = -8 + 12 + 2 = 6$$

Наибольшее значение: $\max\{6, 2, 6\} = 6$.

Ответ: 6.

Задание 17 (Легкое №5)

Сумма двух чисел равна 10. Найдите эти числа, если известно, что их произведение максимально.

Решение:

Обозначим числа через x и y .

По условию:

$$x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$$

Произведение чисел:

$$P = x \cdot y = x(10 - x) = 10x - x^2$$

Находим производную:

$$P'(x) = 10 - 2x$$

Приравниваем производную к нулю:

$$10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5$$

Тогда $y = 10 - 5 = 5$.

Проверяем вторую производную:

$$P''(x) = -2 < 0$$

Значит, $x = 5$ — точка максимума.

Ответ: 5 и 5.

Задание 17 (Легкое №6)

Найдите точку минимума функции $f(x) = x^3 - 12x + 5$.

Решение:

Находим производную функции:

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

Приравниваем производную к нулю:

$$3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = 2$$



Находим вторую производную:

$$f''(x) = 6x$$



Проверяем знак второй производной в критических точках:

$$f''(-2) = -12 < 0 \Rightarrow x = -2 \text{ — точка максимума}$$

$$f''(2) = 12 > 0 \Rightarrow x = 2 \text{ — точка минимума}$$

Ответ: 2.

roxyEGE.ru



Задание 17 (Легкое №7)

Площадь прямоугольника равна 36 см^2 . При каких размерах сторон периметр прямоугольника будет наименьшим?

Решение:

Обозначим стороны прямоугольника через a и b .

По условию:

$$S = a \cdot b = 36 \Rightarrow b = \frac{36}{a}$$

Периметр прямоугольника:

$$P = 2(a + b) = 2\left(a + \frac{36}{a}\right) = 2a + \frac{72}{a}$$

Находим производную:

$$P'(a) = 2 - \frac{72}{a^2}$$

Приравниваем производную к нулю:

$$2 - \frac{72}{a^2} = 0 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6 \text{ (так как } a > 0)$$

Тогда $b = \frac{36}{6} = 6$.

Проверяем вторую производную:

$$P''(a) = \frac{144}{a^3}$$

$$P''(6) = \frac{144}{216} > 0$$

Значит, $a = 6$ — точка минимума.

Ответ: 6 см и 6 см.

Задание 17 (Легкое №8)

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ на промежутке $[0, 2]$.

Решение:

Находим производную функции:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Приравниваем производную к нулю:

$$-\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Точка $x = 0$ принадлежит промежутку $[0, 2]$.

Вычисляем значения функции в критической точке и на концах промежутка:

$$f(0) = \frac{1}{0 + 1} = 1$$

$$f(2) = \frac{1}{4 + 1} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Наибольшее значение: $\max\{1, 0, 2\} = 1$.

Ответ: 1.

ЗАДАЧИ УРОВНЯ ЕГЭ

Задание 17 (№1029)

Из квадратного листа картона со стороной $a = 30$ см изготавливают открытую коробку, вырезая по углам квадраты со стороной x и загибая края. При каком значении x объём коробки будет наибольшим? Ответ дайте в сантиметрах.

Решение:

После вырезания квадратов со стороной x из углов квадратного листа со стороной $a = 30$ см и загибания краёв получаем коробку с размерами:

- Длина основания: $a - 2x = 30 - 2x$
- Ширина основания: $a - 2x = 30 - 2x$
- Высота: x

Объём коробки вычисляется по формуле:

$$V(x) = (30 - 2x)^2 \cdot x$$

Раскрываем скобки:

$$V(x) = (900 - 120x + 4x^2) \cdot x = 4x^3 - 120x^2 + 900x$$

Находим производную функции:

$$V'(x) = 12x^2 - 240x + 900$$

Приравниваем производную к нулю для нахождения критических точек:

$$12x^2 - 240x + 900 = 0$$

Делим на 12:

$$x^2 - 20x + 75 = 0$$

Решаем квадратное уравнение:

$$D = 400 - 300 = 100, \quad \sqrt{D} = 10$$

$$x_1 = \frac{20 + 10}{2} = 15, \quad x_2 = \frac{20 - 10}{2} = 5$$

Так как x должно удовлетворять условию $0 < x < 15$ (иначе сторона основания станет неположительной), то $x = 5$ см.

Проверяем, что это точка максимума, вычисляя вторую производную:

$$V''(x) = 24x - 240$$

$$V''(5) = 120 - 240 = -120 < 0$$

Так как вторая производная отрицательна, $x = 5$ — точка максимума.

Ответ: 5 см.



FoxyEGE.ru



Задание 17 (№1030)

Расход топлива автомобилем на 100 км пути зависит от скорости движения по формуле $Q(v) = 0,01v + \frac{100}{v}$, где v — скорость в км/ч, Q — расход в литрах. При какой скорости расход топлива будет минимальным? Ответ дайте в км/ч.

Решение:

Функция расхода топлива:

$$Q(v) = 0,01v + \frac{100}{v}, \quad v > 0$$



Находим производную функции:



$$Q'(v) = 0,01 - \frac{100}{v^2}$$

Приравниваем производную к нулю:

$$0,01 - \frac{100}{v^2} = 0$$

$$\frac{100}{v^2} = 0,01$$

$$v^2 = \frac{100}{0,01} = 10000$$

$$v = 100 \text{ км/ч (так как } v > 0)$$

Проверяем, что это точка минимума, вычисляя вторую производную:



$$Q''(v) = \frac{200}{v^3}$$

$$Q''(100) = \frac{200}{1000000} > 0$$



Так как вторая производная положительна, $v = 100$ — точка минимума.

Ответ: 100 км/ч.

Задание 17 (№1031)

Вода вытекает из отверстия в стенке бака. Высота бака $H = 4$ м. Отверстие расположено на высоте h от земли. Дальность струи воды определяется формулой $L = 2\sqrt{h(H-h)}$. На какой высоте h следует расположить отверстие, чтобы дальность струи была максимальной? Ответ дайте в метрах.

Решение:

Функция дальности струи:

$$L(h) = 2\sqrt{h(H-h)} = 2\sqrt{h(4-h)} = 2\sqrt{4h-h^2}, \quad 0 < h < 4$$

Для упрощения дифференцирования возведём в квадрат:

$$L^2(h) = 4(4h-h^2) = 16h-4h^2$$

Так как функция $y = \sqrt{x}$ возрастает, то максимум $L(h)$ достигается в той же точке, что и максимум $L^2(h)$.

Находим производную:

$$(L^2)'(h) = 16 - 8h$$

Приравниваем производную к нулю:

$$16 - 8h = 0 \Rightarrow h = 2$$

Проверяем вторую производную:

$$(L^2)''(h) = -8 < 0$$

Значит, $h = 2$ — точка максимума.

Ответ: 2 м.

Задание 17 (№1032)

Источник тока с ЭДС $U = 220$ В и внутренним сопротивлением $r = 4$ Ом подключён к нагрузке с сопротивлением R . Мощность, выделяемая на нагрузке, определяется формулой $P = \frac{U^2 R}{(R + r)^2}$. При каком сопротивлении нагрузки мощность будет максимальной и чему она равна?

Решение:

Функция мощности:

$$P(R) = \frac{U^2 R}{(R + r)^2} = \frac{220^2 \cdot R}{(R + 4)^2}, \quad R > 0$$

Находим производную функции (используем правило дифференцирования дроби):

$$P'(R) = U^2 \cdot \frac{(R + r)^2 \cdot 1 - R \cdot 2(R + r)}{(R + r)^4}$$

$$P'(R) = U^2 \cdot \frac{(R + r) - 2R}{(R + r)^3} = U^2 \cdot \frac{r - R}{(R + r)^3}$$

Приравниваем производную к нулю:

$$U^2 \cdot \frac{r - R}{(R + r)^3} = 0 \Rightarrow r - R = 0 \Rightarrow R = r = 4 \text{ Ом}$$

Проверяем знак производной:

- При $R < 4$: $P'(R) > 0$ (функция возрастает)
- При $R > 4$: $P'(R) < 0$ (функция убывает)

Значит, $R = 4$ — точка максимума.

Находим максимальную мощность:

$$P_{\max} = \frac{220^2 \cdot 4}{(4 + 4)^2} = \frac{48400 \cdot 4}{64} = \frac{193600}{64} = 3025 \text{ Вт}$$

Ответ: $R = 4$ Ом, $P_{\max} = 3025$ Вт.

Задание 17 (№1033)

Периметр прямоугольного окна равен $P = 8$ м. При каких размерах сторон площадь окна будет наибольшей? Найдите эту максимальную площадь. Ответ дайте в квадратных метрах.

Решение:

Обозначим стороны прямоугольника через a и b .

Периметр прямоугольника:

$$P = 2(a + b) = 8 \Rightarrow a + b = 4 \Rightarrow b = 4 - a$$

Площадь окна:

$$S = a \cdot b = a(4 - a) = 4a - a^2$$

Находим производную функции площади:

$$S'(a) = 4 - 2a$$

Приравниваем производную к нулю:

$$4 - 2a = 0 \Rightarrow a = 2$$

Тогда $b = 4 - 2 = 2$.

Проверяем вторую производную:

$$S''(a) = -2 < 0$$

Значит, $a = 2$ — точка максимума.

Находим максимальную площадь:

$$S_{\max} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м}^2$$

Ответ: 2 м и 2 м, $S_{\max} = 4 \text{ м}^2$.

Задание 17 (№1027)

На заводе имеется генератор с ЭДС $\varepsilon = 50$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом. Инженер подключает к генератору нагрузку, используя реостат, чтобы установить сопротивление нагрузки R (в омах). Сила тока в цепи (в амперах) определяется законом Ома: $I = \frac{\varepsilon}{r + R}$. Тепловая мощность (в ваттах), выделяемая в нагрузке, может быть рассчитана по формуле Джоуля — Ленца: $P = I^2 R$. Какова максимальная тепловая мощность P , которая может быть выделена нагрузкой?

Решение:

Подставляем формулу для силы тока в формулу мощности:

$$P(R) = I^2 R = \left(\frac{\varepsilon}{r + R} \right)^2 \cdot R = \frac{\varepsilon^2 R}{(r + R)^2}$$

Подставляем числовые значения $\varepsilon = 50$ В, $r = 1$ Ом:

$$P(R) = \frac{2500 \cdot R}{(1 + R)^2}, \quad R > 0$$

Находим производную функции (аналогично задаче №1032):

$$P'(R) = 2500 \cdot \frac{(1 + R)^2 \cdot 1 - R \cdot 2(1 + R)}{(1 + R)^4}$$

$$P'(R) = 2500 \cdot \frac{(1 + R) - 2R}{(1 + R)^3} = 2500 \cdot \frac{1 - R}{(1 + R)^3}$$

Приравниваем производную к нулю:

$$2500 \cdot \frac{1 - R}{(1 + R)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad R = 1 \text{ Ом}$$

Находим максимальную мощность:

$$P_{\max} = \frac{2500 \cdot 1}{(1 + 1)^2} = \frac{2500}{4} = 625 \text{ Вт}$$

Ответ: 625 Вт.

Задание 17 (№1028)

Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой $A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n^2\tau^2T^2}}$, где $k = 0,91$ — коэффициент, зависящий от отношения ширины корабля к длине волны, $\theta_0 = 9^\circ$ — угол наибольшего волнового склона, $T = 10$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, τ — период волны (в секундах), $n = 0$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

Решение:

Амплитуда колебаний при $n = 0$:

$$A(\tau) = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2}}$$

Так как $\tau > 0$ и $T > 0$, то $\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2} = |T^2 - \tau^2|$.

Рассмотрим случай $\tau < T$:

$$A(\tau) = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{T^2 - \tau^2}$$

Находим производную:

$$A'(\tau) = k\theta_0 \cdot \frac{2\tau(T^2 - \tau^2) - \tau^2 \cdot (-2\tau)}{(T^2 - \tau^2)^2}$$

$$A'(\tau) = k\theta_0 \cdot \frac{2\tau T^2 - 2\tau^3 + 2\tau^3}{(T^2 - \tau^2)^2} = k\theta_0 \cdot \frac{2\tau T^2}{(T^2 - \tau^2)^2}$$

Так как $k\theta_0 > 0$, $\tau > 0$, $T > 0$, то $A'(\tau) > 0$ при всех $\tau \in (0, T)$.

Это означает, что функция $A(\tau)$ возрастает на интервале $(0, T)$ и стремится к бесконечности при $\tau \rightarrow T$.

Следовательно, амплитуда максимальна при $\tau = T = 10$ с (явление резонанса).

Ответ: 10 с.

Задание 17 (Яценко №1)

Распределение кинетической энергии молекул гелия при тепловом движении имеет функцию плотности $f(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}}$, где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана, E — кинетическая энергия молекулы в джоулях, T — температура газа в кельвинах. Найдите значение кинетической энергии E , при котором функция плотности $f(E)$ принимает наибольшее значение, если $T = 300$ К.

Решение:

Функция плотности распределения (знать не обязательно, но заметим константы):

$$f(E) = C \cdot \sqrt{E} \cdot e^{-\frac{E}{kT}}$$

где $C = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}}$ — константа.

Находим производную функции (используем правило произведения):

$$f'(E) = C \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{E}} \cdot e^{-\frac{E}{kT}} + \sqrt{E} \cdot e^{-\frac{E}{kT}} \cdot \left(-\frac{1}{kT} \right) \right)$$

$$f'(E) = C \cdot e^{-\frac{E}{kT}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{E}} - \frac{\sqrt{E}}{kT} \right)$$

Приравниваем производную к нулю:

$$C \cdot e^{-\frac{E}{kT}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{E}} - \frac{\sqrt{E}}{kT} \right) = 0$$

Так как $C \neq 0$ и $e^{-\frac{E}{kT}} \neq 0$, то:

$$\frac{1}{2\sqrt{E}} - \frac{\sqrt{E}}{kT} = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{E}} = \frac{\sqrt{E}}{kT}$$

$$kT = 2E$$

$$E = \frac{kT}{2}$$

Подставляем значения $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, $T = 300$ К:

$$E = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{2} = \frac{414 \cdot 10^{-23}}{2} = 207 \cdot 10^{-23} = 2,07 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$$

Ответ: $2,07 \cdot 10^{-21}$ Дж.



FoxyEGE.ru



Задание 17 (Ященко №2)

Если к цепи, состоящей из конденсатора, резистора и катушки индуктивности, подключить источник переменного тока, то амплитуда напряжения на катушке (в вольтах) будет подчиняться

закону $U_L(\omega) = \frac{UL\omega}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$, где U — амплитуда напряжения

на источнике тока (в вольтах), ω — частота переменного тока (в с^{-1}), L — индуктивность катушки (в генри), C — ёмкость конденсатора (в фарадах), R — сопротивление резистора (в омах). При какой частоте ω амплитуда напряжения на катушке будет наибольшей, если $U = 180 \text{ В}$, $L = 0,027 \text{ Гн}$, $C = 10^{-5} \text{ Ф}$ и $R = 20 \text{ Ом}$?

Решение:

Амплитуда напряжения на катушке:

$$U_L(\omega) = \frac{UL\omega}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Максимум достигается, когда знаменатель минимален. Знаменатель минимален, когда:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

, потому что R — константа.

Интересно заметить, что это условие резонанса в колебательном контуре (известно из общего курса физики).

Решаем уравнение:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Подставляем значения $L = 0,027 \text{ Гн}$, $C = 10^{-5} \text{ Ф}$:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{0,027 \cdot 10^{-5}}} = \frac{1}{\sqrt{27 \cdot 10^{-8}}} = \frac{1}{\sqrt{27 \cdot 10^{-4}}} = \frac{10^4}{\sqrt{27}} = \frac{10000}{3\sqrt{3}} \text{ с}^{-1}$$

Ответ: $\frac{10000}{3\sqrt{3}} \text{ с}^{-1}$.

Задание 17 (Ященко №3)

Распределение скорости молекулы водорода при тепловом движении имеет функцию плотности $f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}$ (распределение Максвелла). В этой формуле v — скорость молекулы в м/с, R — универсальная газовая постоянная, $M = 0,004$ кг/моль — молярная масса водорода, T — температура газа в кельвинах. При каком значении скорости v функция плотности принимает наибольшее значение, если $T = 400$ К?

Решение:

Функция распределения Максвелла:

$$f(v) = C \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}$$

где $C = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}}$ — константа.

Находим производную функции:

$$f'(v) = C \cdot \left(2v \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} + v^2 \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} \cdot \left(-\frac{Mv}{RT} \right) \right)$$

$$f'(v) = C \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} \cdot \left(2v - \frac{Mv^3}{RT} \right)$$

$$f'(v) = C \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} \cdot v \cdot \left(2 - \frac{Mv^2}{RT} \right)$$

Приравниваем производную к нулю:

$$C \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} \cdot v \cdot \left(2 - \frac{Mv^2}{RT} \right) = 0$$

Так как $C \neq 0$, $e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} \neq 0$ и $v > 0$, то:

$$2 - \frac{Mv^2}{RT} = 0$$

$$\frac{Mv^2}{RT} = 2$$

$$v^2 = \frac{2RT}{M}$$

$$v = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

Это наиболее вероятная скорость в распределении Максвелла.

Подставляем значения $M = 0,004$ кг/моль, $T = 400$ К, $R = 8,31$ Дж/(моль·К):

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 400}{0,004}} = \sqrt{\frac{6648}{0,004}} = \sqrt{1662000} = \sqrt{1662 \cdot 1000} = 10\sqrt{16620} \text{ м/с}$$

Ответ: $10\sqrt{16620}$ м/с.



FoxyEGE.ru



ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ УРОВНЯ ЕГЭ

Задание 17 (Дополнительное №1)

Цилиндрический бак объёмом $V = 1000\pi$ л должен иметь наименьшую площадь поверхности. Найдите радиус основания и высоту бака.

Решение:

Объём цилиндра:

$$V = \pi r^2 h = 1000\pi \text{ л} = \pi \text{ м}^3$$

Отсюда:

$$h = \frac{1}{r^2}$$

Площадь полной поверхности цилиндра:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1}{r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2\pi}{r}$$

Находим производную:

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2\pi}{r^2}$$

Приравниваем производную к нулю:

$$4\pi r - \frac{2\pi}{r^2} = 0$$

$$4\pi r = \frac{2\pi}{r^2}$$

$$4r^3 = 2$$

$$r^3 = \frac{1}{2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ м}$$

Находим высоту:

$$h = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}} = \sqrt[3]{4} \text{ м}$$

Заметим, что $h = \sqrt[3]{4} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 2r$ (высота равна диаметру).

Ответ: $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ м}$, $h = \sqrt[3]{4} \text{ м}$.

Задание 17 (Дополнительное №2)

Катер проходит расстояние $S = 120$ км по реке против течения и возвращается обратно. Скорость течения реки $u = 3$ км/ч. При собственной скорости катера v км/ч расход топлива пропорционален квадрату скорости: $Q = kv^2$. При какой собственной скорости катера общий расход топлива на весь путь будет минимальным?

Решение:

Время движения против течения:

$$t_1 = \frac{S}{v - u} = \frac{120}{v - 3}$$

Время движения по течению:

$$t_2 = \frac{S}{v + u} = \frac{120}{v + 3}$$

Расход топлива пропорционален квадрату скорости и времени:

$$Q_{\text{общ}} = kv^2 t_1 + kv^2 t_2 = kv^2 \left(\frac{120}{v - 3} + \frac{120}{v + 3} \right)$$

$$Q_{\text{общ}} = 120kv^2 \left(\frac{1}{v - 3} + \frac{1}{v + 3} \right) = 120kv^2 \cdot \frac{2v}{v^2 - 9}$$

$$Q_{\text{общ}} = \frac{240kv^3}{v^2 - 9}, \quad v > 3$$

Находим производную (коэффициент $240k$ можно не учитывать при поиске экстремума):

$$f(v) = \frac{v^3}{v^2 - 9}$$

$$f'(v) = \frac{3v^2(v^2 - 9) - v^3 \cdot 2v}{(v^2 - 9)^2} = \frac{3v^4 - 27v^2 - 2v^4}{(v^2 - 9)^2} = \frac{v^4 - 27v^2}{(v^2 - 9)^2}$$

$$f'(v) = \frac{v^2(v^2 - 27)}{(v^2 - 9)^2}$$

Приравниваем производную к нулю:

$$v^2(v^2 - 27) = 0$$

Так как $v > 3$, то:

$$v^2 = 27 \Rightarrow v = 3\sqrt{3} \text{ км/ч}$$

Ответ: $3\sqrt{3}$ км/ч.

Задание 17 (Дополнительное №3)

Из круглого листа металла радиусом $R = 10$ см нужно вырезать сектор такого размера, чтобы из оставшейся части можно было свернуть конус наибольшего объёма. Найдите угол сектора в радианах.

Решение:

Пусть α — угол вырезаемого сектора в радианах. Тогда угол оставшейся части равен $2\pi - \alpha$.

Длина дуги оставшейся части:

$$l = R(2\pi - \alpha) = 10(2\pi - \alpha)$$

Эта дуга становится окружностью основания конуса:

$$2\pi r = 10(2\pi - \alpha) \Rightarrow r = \frac{10(2\pi - \alpha)}{2\pi} = 10 \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)$$

Образующая конуса равна радиусу исходного круга: $l_{\text{обр}} = R = 10$ см.

Высота конуса по теореме Пифагора:

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{100 - r^2}$$

Объём конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{100 - r^2}$$

Для максимума объёма удобно максимизировать V^2 :

$$V^2 = \frac{\pi^2}{9} r^4 (100 - r^2) = \frac{\pi^2}{9} (100r^4 - r^6)$$

Находим производную по r :

$$(V^2)' = \frac{\pi^2}{9} (400r^3 - 6r^5) = \frac{\pi^2}{9} \cdot 2r^3 (200 - 3r^2)$$

Приравниваем производную к нулю:

$$200 - 3r^2 = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{200}{3} \Rightarrow r = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{6}}{3}$$

Находим угол α :

$$r = 10 \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) = \frac{10\sqrt{6}}{3}$$

$$1 - \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{\alpha}{2\pi} = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\alpha = 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 2\pi \cdot \frac{3 - \sqrt{6}}{3} \text{ рад}$$

Ответ: $2\pi \cdot \frac{3 - \sqrt{6}}{3}$ рад.



FoxyEGE.ru

