

Теория по степеням и корням

Основные свойства и примеры



Подготовил: FoxyEGE.ru



30 сентября 2025 г.

FoxyEGE.ru



[FoxyEGE.ru](https://foxyege.ru)

Оглавление

1	Степени и корни	2
1.1	Свойства степеней	2
1.2	Свойства корней	3
1.3	Решение уравнений	4
1.4	Степенная функция	4
1.5	Шпаргалка по свойствам степеней и корней	5

FoxyEGE.ru



Глава 1

Степени и корни

1.1 Свойства степеней

Формулировка

Степень с основанием a и показателем n , обозначаемая a^n , определяет, сколько раз число a умножается само на себя. Для целых $n \geq 1$, $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n раз). Степени с отрицательными, нулевыми и дробными показателями расширяют это понятие.

Основные свойства

Для $a, b \neq 0, m, n \in \mathbb{R}$, если выражение определено:

- Произведение степеней с одинаковым основанием: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
- Частное степеней с одинаковым основанием: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
- Степень произведения: $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.
- Степень частного: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.
- Степень степени: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
- Нулевая степень: $a^0 = 1$.
- Отрицательная степень: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- Дробная степень: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$, если $a > 0$ для четных n .

Примеры

- Упростить $3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^{-1}$:

$$3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^{-1} = 3^{2+3-1} = 3^4 = 81.$$

- Упростить $\frac{5^4}{5^2}$:

$$\frac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^2 = 25.$$



- Упростить $(2^3)^2$:

$$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64.$$

- Вычислить 4^{-2} :

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}.$$

1.2 Свойства корней

Формулировка

Корень n -й степени из числа a , обозначаемый $\sqrt[n]{a}$, — это число b , такое, что $b^n = a$. Для четных n , $a \geq 0$, и $\sqrt[n]{a} \geq 0$. Для нечетных n , a может быть любым действительным числом.

Основные свойства

Для $a, b \geq 0$ (для четных n) и любых $a, b \in \mathbb{R}$ (для нечетных n), если выражение определено:

- Связь с дробной степенью: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$.
- Произведение корней: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.
- Частное корней: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, если $b \neq 0$.
- Корень из степени: $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$.
- Корень из корня: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$.
- Для четных n : $\sqrt[n]{a} \geq 0$.
- Для нечетных n : $\sqrt[n]{a}$ имеет тот же знак, что и a .

Примеры

- Упростить $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$:

$$\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4.$$

- Упростить $\sqrt[3]{27}$:

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3.$$

- Упростить $\sqrt[4]{16^2}$:

$$\sqrt[4]{16^2} = \sqrt[4]{(2^4)^2} = \sqrt[4]{2^8} = 2^{8/4} = 2^2 = 4.$$

- Упростить $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$:

$$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2.$$



1.3 Решение уравнений

Формулировка

Уравнения со степенями и корнями решаются с использованием их свойств. Основные подходы: приравнивание показателей для одинаковых оснований или возведение обеих частей уравнения в степень для устранения корня.

Примеры

- Решить $2^x = 16$:

$$2^x = 16 = 2^4 \implies x = 4.$$

Проверка: $2^4 = 16$.

- Решить $\sqrt{x} = 5$:

$$\sqrt{x} = 5 \implies x = 5^2 = 25.$$

Проверка: $\sqrt{25} = 5$.

- Решить $\sqrt[3]{x} = -2$:

$$\sqrt[3]{x} = -2 \implies x = (-2)^3 = -8.$$

Проверка: $\sqrt[3]{-8} = -2$.

- Упростить и решить $9^x = 3^{x+1}$:

$$9 = 3^2 \implies 9^x = (3^2)^x = 3^{2x} \implies 3^{2x} = 3^{x+1} \implies 2x = x+1 \implies x = 1.$$

Проверка: $9^1 = 9, 3^{1+1} = 3^2 = 9$.

1.4 Степенная функция

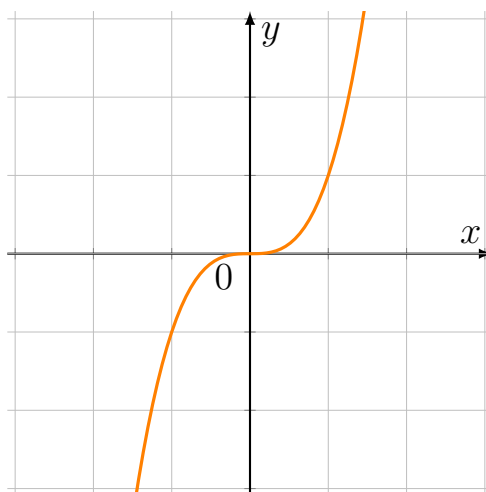
Формулировка

Степенная функция имеет вид $y = x^n$, где n — степень. Она обобщает степени для всех x , где функция определена.

Свойства

- Для целого $n \geq 1$:
 - Если n четное: функция четная ($f(-x) = f(x)$), график симметричен относительно оси Oy .
 - Если n нечетное: функция нечетная ($f(-x) = -f(x)$), график симметричен относительно начала координат.
- Область определения: $\mathbb{R}$ для целых $n \geq 1$; $x \geq 0$ для дробных n с четным знаменателем.
- Область значений: зависит от n . Например, для $y = x^3, y \in \mathbb{R}$; для $y = x^2, y \geq 0$.



Рис. 1.1: Степенная функция $y = x^3$

1.5 Шпаргалка по свойствам степеней и корней

Свойства степеней	Свойства корней
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
$(ab)^n = a^n \cdot b^n$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, b \neq 0$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
$a^0 = 1, a \neq 0$	Для четных n : $\sqrt[n]{a} \geq 0, a \geq 0$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	Для нечетных n : $\sqrt[n]{a}$ имеет знак a
$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$	

Таблица 1.1: Сводка свойств степеней и корней