



Теория по функциям и их графикам



Базовые понятия, свойства и исследования
для ЕГЭ

Подготовил: FoxyEGE.ru

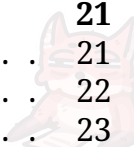
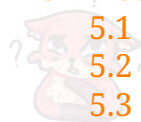
25 сентября 2025 г.
FoxyEGE.ru



Оглавление



1 Основные понятия о функциях	2
1.1 Определение функции	2
1.2 Область определения	2
1.3 Область значений	3
1.4 График функции	3
2 Свойства функций	4
2.1 Четность и нечетность	4
2.2 Периодичность	4
2.3 Монотонность	5
3 Элементарные функции	7
3.1 Линейная функция	7
3.2 Квадратичная функция	7
3.3 Степенная функция	8
3.4 Показательная функция	8
3.5 Логарифмическая функция	9
3.6 Гиперболическая функция	10
3.7 Тригонометрические функции	10
4 Функции в задании 11 ЕГЭ по профильной математике	13
4.1 Восстановление коэффициентов квадратичной функции	13
4.2 Восстановление коэффициентов линейной функции	14
4.3 Восстановление коэффициентов $y = k\sqrt{x} + b$	15
4.4 Восстановление коэффициентов $y = \frac{k}{x} + b$	16
4.5 Восстановление коэффициентов и поиск точек пересечения	17
4.5.1 Прямая и парабола	17
4.5.2 Прямая и корень	18
5 Исследование функций	21
5.1 Нули функции	21
5.2 Экстремумы	22
5.3 *Асимптоты	23



Основные понятия о функциях

1.1 Определение функции

Формулировка

Функция $y = f(x)$ — это правило (закон), по которому каждому значению аргумента x из области определения $D(f)$ соответствует единственное значение y из области значений $E(f)$. Графически функция — множество точек $(x, f(x))$ на плоскости, где каждая вертикальная линия пересекает график не более чем в одной точке (тест вертикальной линии).

Функция может быть задана аналитически (формулой), графически, таблично или словесно. Например, $f(x) = x^2$ — квадратичная, определена для всех $x \in \mathbb{R}$.

Определение функции лежит в основе анализа зависимостей.

1.2 Область определения

Формулировка

Область определения $D(f)$ — множество всех x , для которых $f(x)$ определено. Например, для рациональных функций недопустимыми значениями будут такие значения, при которых получается деление на ноль, отрицательные значения под корнями четной степени и прочие частные ограничения самого вида функции.

Область определения гарантирует существование значений.

Например, на рисунке ниже вы можете увидеть, что функция $y = \sqrt{x}$ имеет область определения $D(f) = [0; +\infty)$

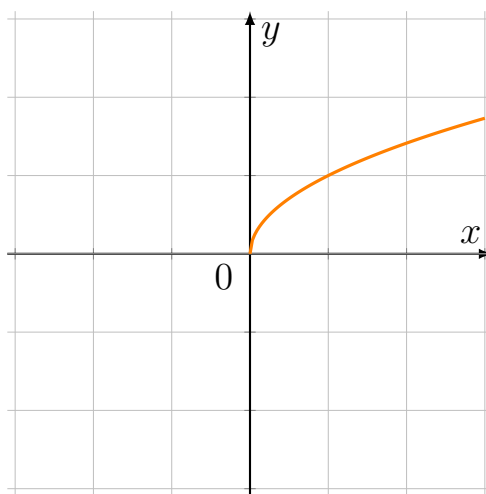


Рис. 1.1: График $y = \sqrt{x}$, $D(f) = [0; +\infty)$

1.3 Область значений

Формулировка

Область значений $E(f)$ — множество всех возможных $f(x)$ при $x \in D(f)$. Для монотонных функций: от минимума до максимума или асимптот.

Вычисление: анализировать монотонность, экстремумы, пределы при $x \rightarrow \pm\infty$ (10-11 класс).

Например, на рисунке ниже вы можете увидеть, что функция $y = \sin x$ имеет область значений $E(f) = [-1; 1]$

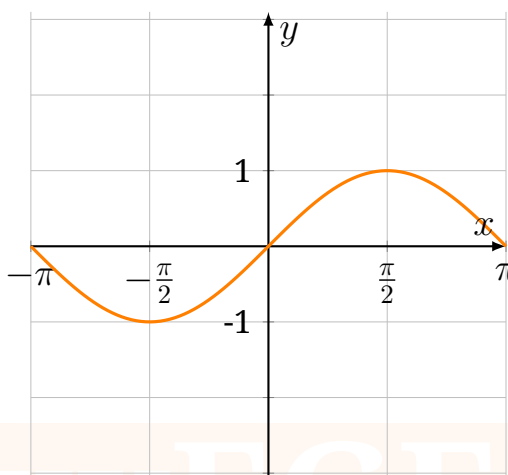


Рис. 1.2: График $y = \sin x$, $E(f) = [-1, 1]$

1.4 График функции

Формулировка

График функции $y = f(x)$ — множество точек (x, y) на координатной плоскости, где $y = f(x)$.

Дополнение

- Построение: таблица значений, ключевые точки (нули, экстремумы), асимптоты.
- Смещение: $f(x - a) + b$ — сдвиг на a вправо, b вверх.
- Сжатие/растяжение: $f(kx)$ — по x в $1/k$, $kf(x)$ — по y в k .

График визуализирует поведение функции.

Свойства функций

2.1 Чётность и нечётность

Формулировка

Чётная функция: $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in D(f)$, график симметричен относительно y -оси.

Нечётная: $f(-x) = -f(x)$, симметрия относительно начала координат.

Дополнение

- Примеры: $f(x) = x^2$ — чётная, $f(x) = x^3$ — нечётная, $f(x) = x + 1$ — ни то, ни другое.
- Сумма: чётная + чётная = чётная, нечётная + нечётная = чётная.
- Произведение: чётная · нечётная = нечётная.
- В ЕГЭ можно использовать симметрию для упрощения исследования.

Симметрия упрощает анализ и очень помогает при решении неравенств.

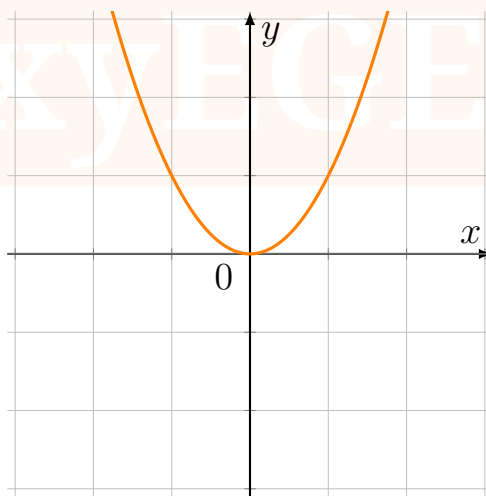


Рис. 2.1: Чётная функция $y = x^2$, симметрия по Oy

2.2 Периодичность

Формулировка

Функция периодическая с периодом $T > 0$, если $f(x + T) = f(x)$ для всех $x \in D(f)$. Минимальный такой T — основной период.

Дополнительные свойства

- Примеры: $\sin x$ с $T = 2\pi$, $\operatorname{tg} x$ с $T = \pi$.
- Сумма периодических функций с кратными периодами — периодическая.

Периодичность описывает цикличность.

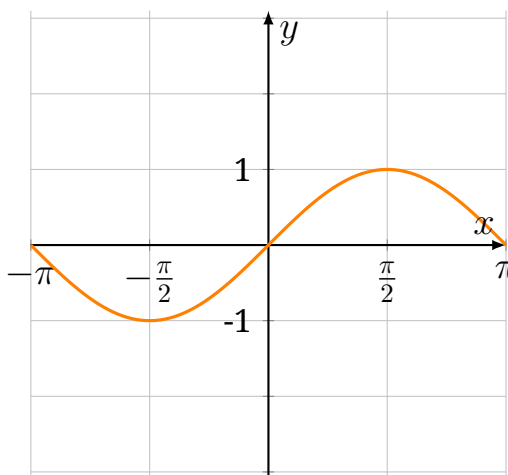


Рис. 2.2: Периодическая функция $y = \sin x$, $T = 2\pi$

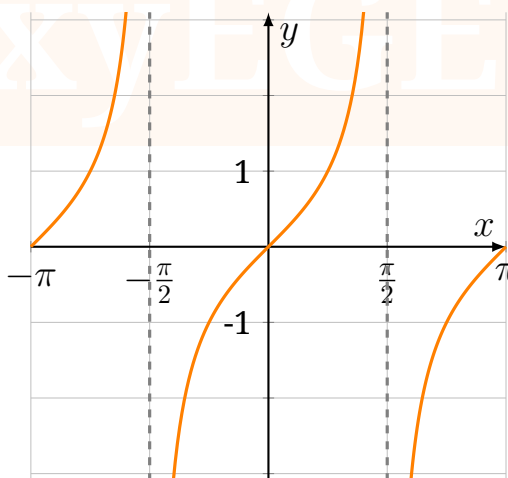


Рис. 2.3: Периодическая функция $y = \operatorname{tg} x$, $T = \pi$

2.3 Монотонность

Формулировка

Функция возрастающая на интервале, если при $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leq f(x_2)$ (строго — $<$). Убывающая — наоборот.

Проще: большему значению X соответствует большее значение Y — возрастающая. Убывающая — наоборот.

Если функция дифференцируема, то



$f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ возрастает
 $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ убывает

Монотонность определяет направление графика.

Например, на рисунке ниже вы видите монотонно возрастающую функцию.

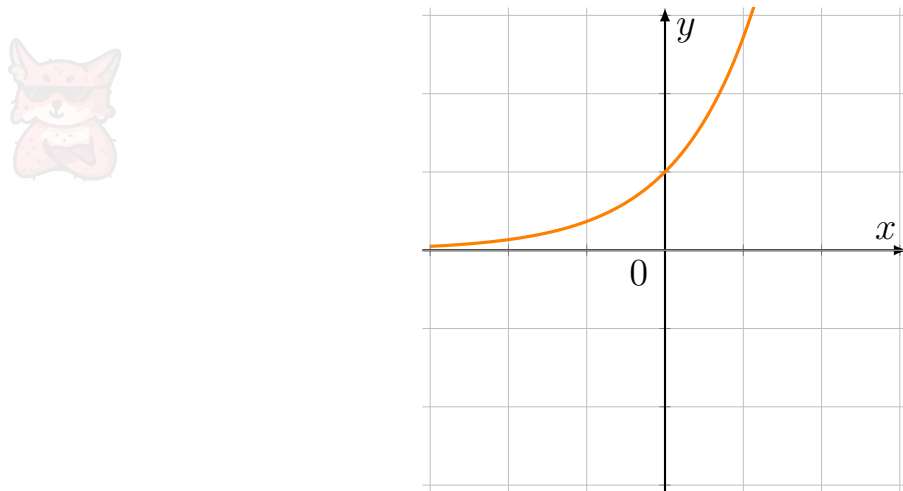


Рис. 2.4: Монотонно возрастающая функция $y = e^x$

FoxyEGE.ru



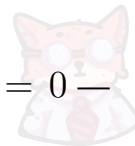
Элементарные функции

Обзор базовых функций и их графиков.

3.1 Линейная функция

Формулировка

Линейная функция $y = kx + b$, где k — наклон, b — сдвиг по y . Если $k = 0$ — константа.



Дополнительные свойства

- График — прямая. Угол наклона $\alpha = \arctg k$.
- Обратная: $x = \frac{y-b}{k}$, если $k \neq 0$.
- Монотонна: возрастающая при $k > 0$, убывающая при $k < 0$.
- В ЕГЭ используется в задачах с пересечением и производной (геометрический смысл).

Прямая — простейшая функция.

3.2 Квадратичная функция

Формулировка

Квадратичная $y = ax^2 + bx + c$, парабола. Вершина в $x = -\frac{b}{2a}$.

Дополнение

- c — свободный член, а значит $f(0) = c$.
- Если $a > 0$ — вверх, $a < 0$ — вниз.
- Абсцисса вершины параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- Нули: $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где дискриминант $D = b^2 - 4ac$.
- Форма $y = a(x - h)^2 + k \rightarrow$ вершина (h, k) .
- В ЕГЭ квадратичная функция используется повсеместно: в 11, 15 и 18 заданиях практически ни один реальный экзаменационный вариант не обходится. Даже в 9 задании, бывает, необходимо ее использование.



Парабола — базовая нелинейная функция.



3.3 Степенная функция

Формулировка

Степенная $y = x^n$, где n — степень. Для n чётное — чётная, для нечётное — нечётная.

Дополнительные свойства

- Для $n = 1$ — линейная, $n = 2$ — парабола.
- Асимптоты: при $n > 0$ — $y = 0$ при $x = 0$ для чётных.
- Монотонность зависит от n и знака.
- В ЕГЭ практически не встречается в виде графиков, но в виде формул встречается повсеместно.

Степенные — основа полиномов.

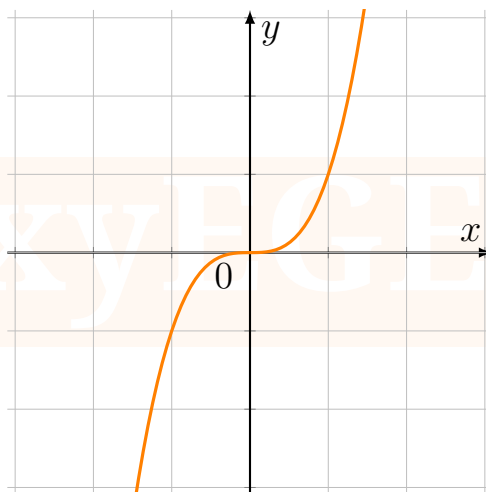


Рис. 3.1: Степенная $y = x^3$

3.4 Показательная функция

Формулировка

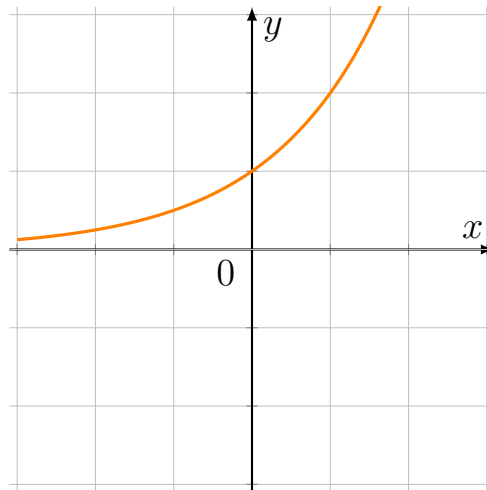
Экспоненциальная $y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$. Если основание $a > 1$ — возрастающая, $0 < a < 1$ — убывающая.

Дополнительные свойства

- $y = e^x$ — натуральная, производная равна себе.
- Асимптота $y = 0$ при $x \rightarrow -\infty$.
- Свойствами являются все свойства степеней.



- В ЕГЭ встречаются в 12, 13 и 15 заданиях, а также в 18.

Рис. 3.2: Показательная $y = 2^x$

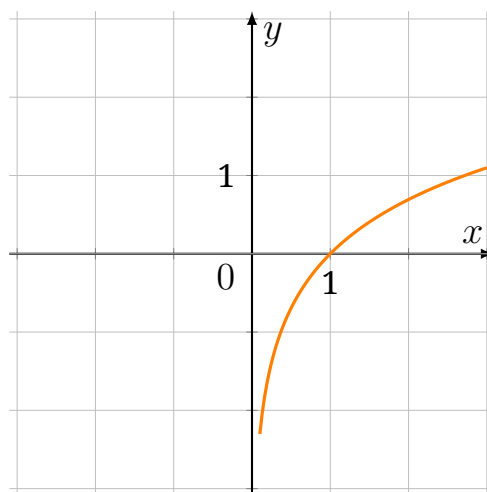
3.5 Логарифмическая функция

Формулировка

Логарифмическая $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

Дополнительные свойства

- $a > 1$ — возрастающая, $0 < a < 1$ — убывающая.
- Асимптота $x = 0$.
- Натуральный $\ln x = \log_e x$.
- Теоретически, это обратная функция к показательной функции (инверсия).
- В ЕГЭ встречается в 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15 и 18 заданиях!!!.

Рис. 3.3: Логарифмическая $y = \ln x$

3.6 Гиперболическая функция

Формулировка

Гиперболическая функция (функция обратной пропорциональности) $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, $x \neq 0$. График — гипербола, симметричная относительно начала координат при $k > 0$.

Дополнительные свойства

- Область определения: $x \neq 0$.
- Асимптоты: вертикальная $x = 0$, горизонтальная $y = 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.
- Монотонность: убывающая при $k > 0$, возрастающая при $k < 0$ на каждой ветви.
- Чётность: нечётная, так как $f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x)$.
- В ЕГЭ встречается в 11, 12 заданиях (Редко в 18).

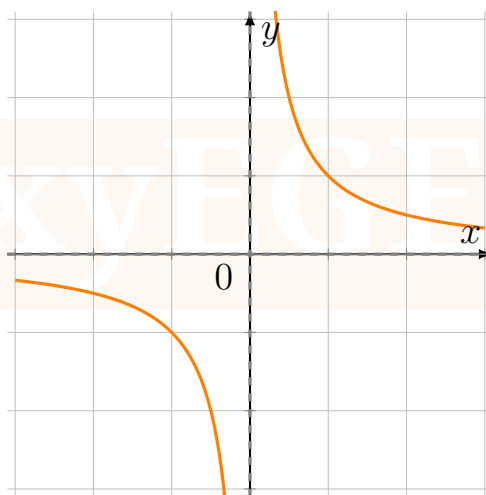


Рис. 3.4: Гиперболическая $y = \frac{1}{x}$, асимптоты $x = 0$, $y = 0$

3.7 Тригонометрические функции

Формулировка

Тригонометрические функции — это функции, связанные с углами и единичной окружностью. Основные тригонометрические функции, используемые в ЕГЭ:

- $y = \sin x$: синус, период 2π , амплитуда 1.
- $y = \cos x$: косинус, период 2π , амплитуда 1.
- $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$: тангенс, период π , вертикальные асимптоты при $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Эти функции описывают циклические процессы и широко применяются в задачах на графики, уравнения, неравенства и текстовые задачи, включая моделирование колебаний.

Основные свойства

• Область определения:

- $\sin x, \cos x: D(f) = \mathbb{R}$ (все действительные числа).
- $\operatorname{tg} x: D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ (исключая точки, где $\cos x = 0$).

• Область значений:

- $\sin x, \cos x: E(f) = [-1, 1]$.
- $\operatorname{tg} x: E(f) = \mathbb{R}$ (все действительные числа).

• Монотонность:

- $\sin x$: возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, убывает на $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x$: возрастает на $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$, убывает на $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\operatorname{tg} x$: возрастает на каждом интервале $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

• Основные тождества:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ (при $\cos x \neq 0$).

Применение в ЕГЭ

- **Уравнения и неравенства** (задания 13, 15, 18): Решение уравнений типа $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ требует учета периода и области определения. Например, для $\sin x = \frac{1}{2}$ решения: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- **Параметры** (задание 18): Анализ уравнений с параметрами, например, $\sin x = a$, где a — параметр, требует определения числа решений в зависимости от a .
- **Текстовые задачи** (задание 9): Моделирование колебательных процессов, например, гармонических колебаний маятника: $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$, где A — амплитуда, ω — циклическая частота, ϕ — начальная фаза. Необходимо знать формулы приведения для таких задач.
- **Производные** (задание 12): Использование производных $\sin x$ ($\cos x$), $\cos x$ ($-\sin x$), $\operatorname{tg} x$ ($\frac{1}{\cos^2 x}$) для анализа монотонности и экстремумов.

Тригонометрические функции важны для анализа периодичности, симметрии и поведения графиков в задачах ЕГЭ.

Тригонометрия описывает циклические колебания и зависимости, связанные с углами и окружностью.

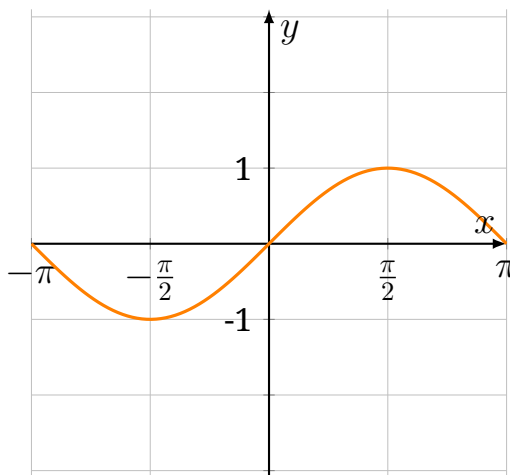


Рис. 3.5: Тригонометрическая $y = \sin x$

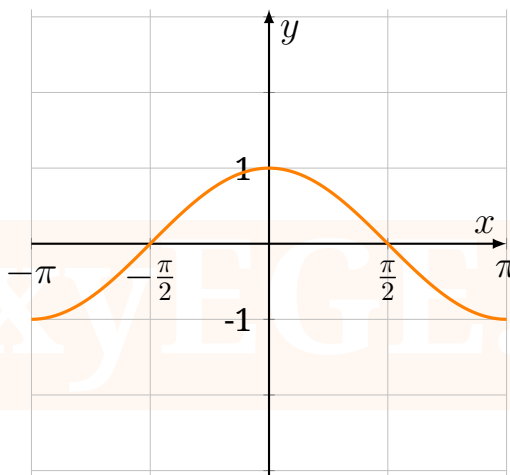


Рис. 3.6: Тригонометрическая $y = \cos x$

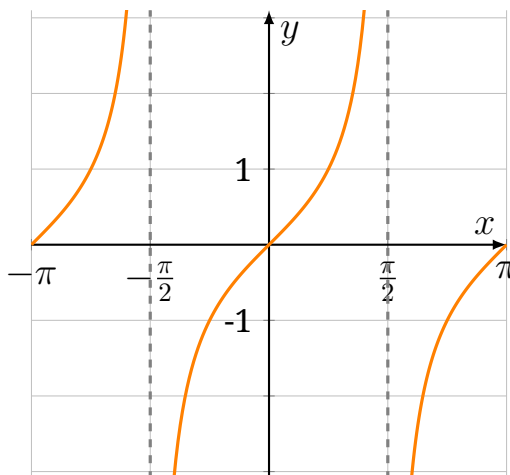


Рис. 3.7: Тригонометрическая $y = \operatorname{tg} x$

Функции в задании 11 ЕГЭ по профильной математике

Эта глава посвящена функциям, часто встречающимся в задании 11 ЕГЭ: квадратичной $y = ax^2 + bx + c$, линейной $y = kx + b$, квадратного корня $y = \sqrt{x}$ и гиперболы $y = \frac{k}{x}$. Рассматривается восстановление коэффициентов по точкам, нахождение пересечений, абсцисс пересечений и значений функций. Все примеры с целыми числами.

4.1 Восстановление коэффициентов квадратичной функции

Дана функция вида $y = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(-4)$.

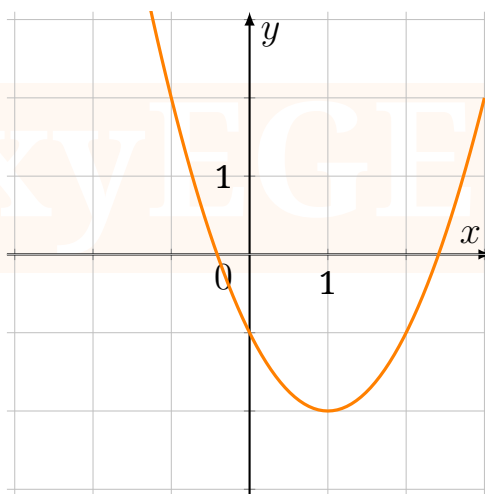


Рис. 4.1: Квадратичная $y = ax^2 + bx + c$

Заметим, что $c = -1$ (см. рис.)

Тогда $f(x) = ax^2 + bx - 1$.

Восстановим оставшиеся два коэффициента, взяв точки $(-1; 2)$ и $(2; -1)$:

$$\begin{cases} 2 = a \cdot (-1)^2 - b - 1 \\ -1 = a \cdot 2^2 + 2b - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = a - b \\ 0 = 4a + 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = a - b \\ 0 = 2a + b \end{cases}$$

Складываем верхнее с нижним:

$$a = -1 \rightarrow b = -2$$

$$f(-4) = (-4)^2 - 2 \cdot (-4) - 1 = 16 + 8 - 1 = 23.$$

4.2 Восстановление коэффициентов линейной функции

Дана функция $f(x) = kx + b$. Найти значение функции $f(3)$

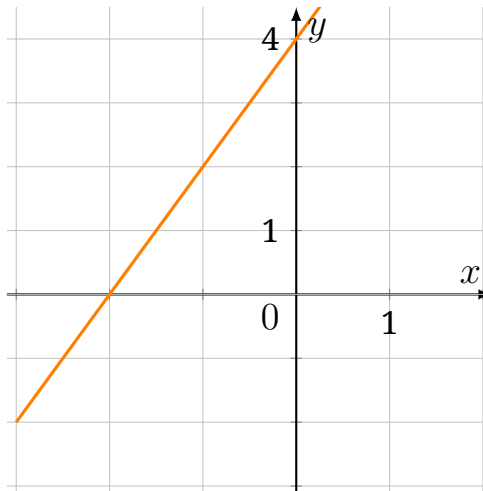


Рис. 4.2: Линейная $y = kx + b$

Исходя из данного графика, $f(0) = 4 \rightarrow b = 4$

Значит в данный момент функция $f(x)$ выглядит так: $f(x) = kx + 4$

Возьмем точку $(-2; 0)$ и восстановим коэффициент k :

$$0 = k \cdot (-2) + 4 \rightarrow k = 2$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 4 = 10.$$

Ответ: 10



4.3 Восстановление коэффициентов $y = k\sqrt{x} + b$

Дана функция вида $f(x) = k\sqrt{x} + b$. Найдите $f(9)$.

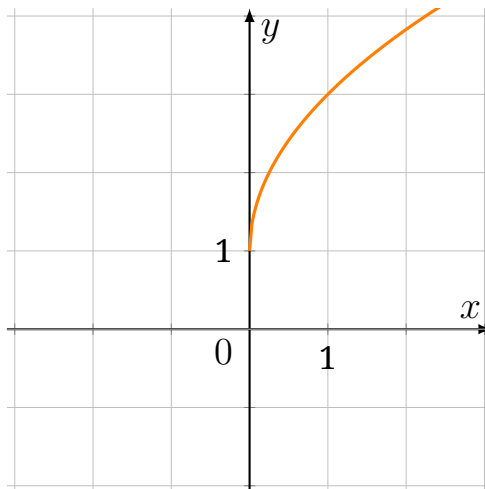


Рис. 4.3: $y = f(x)$

Заметим, что при $x = 0$, $f(0) = 1$ (см. рис.). Тогда:
 $b = 1$.

Таким образом, функция имеет вид: $f(x) = k\sqrt{x} + 1$.
Восстановим коэффициент k , взяв точку $(1; 3)$:

$$3 = k\sqrt{1} + 1 \implies 3 = k + 1 \implies k = 2.$$

Итак, функция: $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$.

Найдем $f(9)$:

$$f(9) = 2\sqrt{9} + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7.$$

Ответ: 7.

4.4 Восстановление коэффициентов $y = \frac{k}{x} + b$

Дана функция вида $y = \frac{k}{x} + b$. Найдите $f(-9)$.

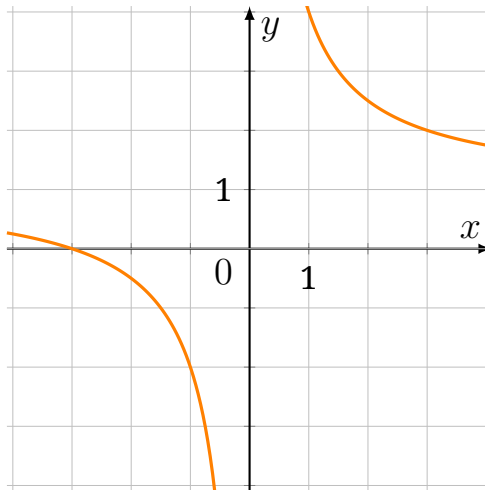


Рис. 4.4: $y = \frac{3}{x} + 1$

Восстановим коэффициенты, взяв точки $(-3; 0)$ и $(3; 2)$ (см. рис.):

$$\begin{cases} 0 = \frac{k}{-3} + b \\ 2 = \frac{k}{3} + b \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = -\frac{k}{3} + b \\ 2 = \frac{k}{3} + b \end{cases}$$

Вычтем первое уравнение из второго:

$$2 - 0 = \frac{k}{3} - \left(-\frac{k}{3}\right) \implies 2 = \frac{k}{3} + \frac{k}{3} \implies 2 = \frac{2k}{3} \implies k = 3.$$

Подставим $k = 3$ в первое уравнение:

$$0 = -\frac{3}{3} + b \implies 0 = -1 + b \implies b = 1.$$

Итак, функция: $f(x) = \frac{3}{x} + 1$.

Найдем $f(-1)$:

$$f(-6) = \frac{3}{-6} + 1 = -0,5 + 1 = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

4.5 Восстановление коэффициентов и поиск точек пересечения

4.5.1 Прямая и парабола

Даны функции вида $g(x) = kx$ и $f(x) = ax^2 + bx + c$, пересекающиеся в точках А (0; 0) и В. Найдите абсциссу точки В.

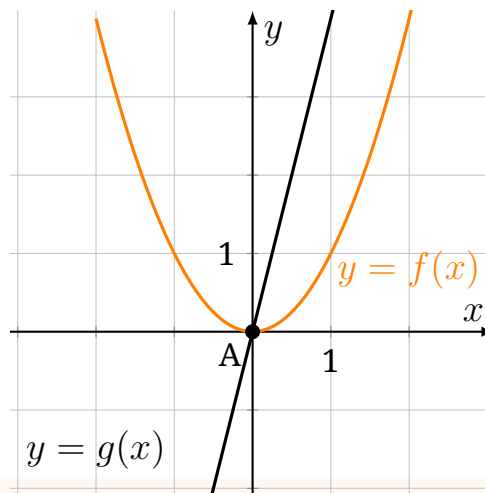


Рис. 4.5: $y = f(x)$ и $y = g(x)$

Для функции $g(x) = kx$:

Восстановим коэффициент k , взяв точку (1; 4):

$$4 = k \cdot 1 \implies k = 4.$$

Итак, $g(x) = 4x$.

Для функции $f(x) = ax^2 + bx + c$:

Заметим, что $f(x) = ax^2$, так как вершина параболы находится в точке (0; 0)

Восстановим коэффициент a , взяв точку (1; 1):

$$1 = a \cdot 1^2.$$

$$a = 1.$$

Итак, $f(x) = x^2$.

Найдем точки пересечения:

Для точек пересечения $g(x) = f(x)$:

$$4x = x^2.$$

$$x^2 - 4x = 0 \implies x(x - 4) = 0 \implies x = 0 \text{ или } x = 4.$$

Точка А: $x = 0$.

Точка В: $x = 4$.

Ответ: 4.



4.5.2 Прямая и корень

Даны функции вида $g(x) = kx + m$ и $f(x) = a\sqrt{x}$, пересекающиеся в точках А (1; 1) и В. Найдите абсциссу точки В.

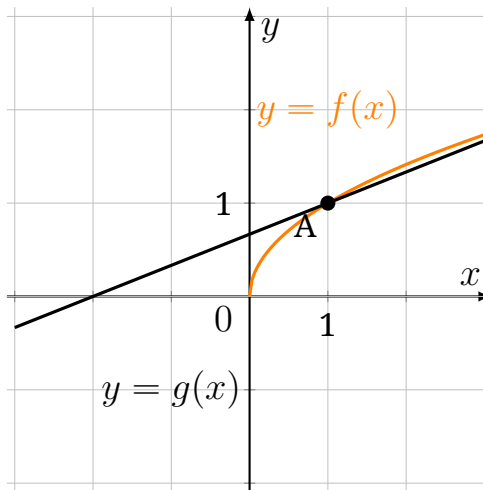


Рис. 4.6: $y = f(x)$ и $y = g(x)$

Для функции $f(x) = a\sqrt{x}$:

Восстановим коэффициент a , взяв точку (1; 1):

$$1 = a\sqrt{1} \implies a = 1.$$

Итак, $f(x) = \sqrt{x}$.

Для функции $g(x) = kx + m$:

Восстановим коэффициенты k и m , взяв точки (1; 1) и (4; 2):

$$\begin{cases} 1 = k \cdot 1 + m \\ 2 = k \cdot 4 + m \end{cases} \quad \begin{cases} k + m = 1 \\ 4k + m = 2 \end{cases} \quad \text{Вычтем первое уравнение из второго:}$$

$$(4k + m) - (k + m) = 2 - 1 \implies 3k = 1 \implies k = \frac{1}{3}.$$

Подставим $k = \frac{1}{3}$ в первое уравнение:

$$\frac{1}{3} + m = 1 \implies m = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Итак, $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

Найдем точки пересечения:

$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = \sqrt{x}$. Пусть $t = \sqrt{x}$, тогда $x = t^2$, и уравнение:

$$\frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3} = t.$$

Умножим на 3:

$$t^2 + 2 = 3t \implies t^2 - 3t + 2 = 0.$$



Решим квадратное уравнение:

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}.$$

$$t = 2 \text{ или } t = 1.$$

Тогда:

$$-t = 1 \implies x = t^2 = 1, y = \sqrt{1} = 1, \text{ точка } A(1; 1).$$

$$-t = 2 \implies x = t^2 = 4, y = \sqrt{4} = 2, \text{ точка } B(4; 2).$$

Абсцисса точки В: $x = 4$.

Ответ: 4.

Гипербола и прямая

Даны функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = mx + b$, пересекающиеся в точках А (1; 2) и В. Найдите абсциссу точки В.

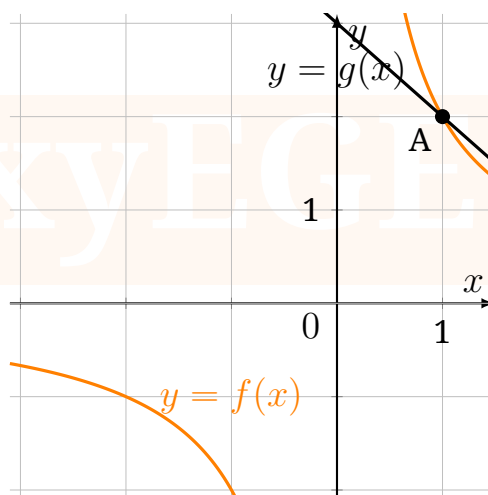


Рис. 4.7: $y = f(x)$ и $y = g(x)$

Для функции $f(x) = \frac{k}{x}$:

Восстановим коэффициент k , взяв точку (1; 2):

$$2 = \frac{k}{1} \implies k = 2.$$

Итак, $f(x) = \frac{2}{x}$.

Для функции $g(x) = mx + b$:

Восстановим коэффициенты m и b , взяв точки (1; 2) и (2; 1):

$$\begin{cases} 2 = m \cdot 1 + b \\ 1 = m \cdot 2 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} m + b = 2 \\ 2m + b = 1 \end{cases}$$

Вычтем первое уравнение из второго:

$$(2m + b) - (m + b) = 1 - 2 \implies m = -1.$$

Подставим $m = -1$ в первое уравнение:

$$-1 + b = 2 \implies b = 3.$$

Итак, $g(x) = -x + 3$.

Найдем точки пересечения:

Для точек пересечения $f(x) = g(x)$:

$$\frac{2}{x} = -x + 3.$$

Умножим на x ($x \neq 0$):

$$2 = -x^2 + 3x \implies x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Решим квадратное уравнение:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \implies x = 1 \text{ или } x = 2.$$

Точка А: $x = 1, y = \frac{2}{1} = 2, y = -1 + 3 = 2$, т.е. $(1; 2)$.

Точка В: $x = 2, y = \frac{2}{2} = 1, y = -2 + 3 = 1$, т.е. $(2; 1)$.

Абсцисса точки В: $x = 2$.

Ответ: 2.



Исследование функций

5.1 Нули функции

Формулировка

Нули функции — точки x_0 , где $f(x_0) = 0$. Это точки пересечения графика функции с осью Ox . Для их нахождения решается уравнение $f(x) = 0$.

Свойства и методы

- **Для полиномов:** Используется теорема Безу: если $f(a) = 0$, то $x - a$ — множитель. Применяется факторизация или численное решение (например, метод подбора корней).
- **Кратность корня:** Если корень x_0 имеет кратность k , то $(x - x_0)^k$ — множитель. При четной кратности график касается оси Ox , при нечетной — пересекает.
- **Для рациональных функций:** Нули — корни числителя, если знаменатель не равен нулю в этих точках.
- **В ЕГЭ:** Задания 8, 11, 12, 15 требуют найти нули по графику или уравнению (промежутки/интервалы в 15). Задание 18 может включать нули с параметрами, например, $\sin x = a$. Важно указывать все корни с учетом области определения.
- **Метод интервалов:** После нахождения нулей определяется знак функции на интервалах, что помогает в задачах на неравенства (задание 15).

Нули определяют точки пересечения с осью Ox и поведение функции.

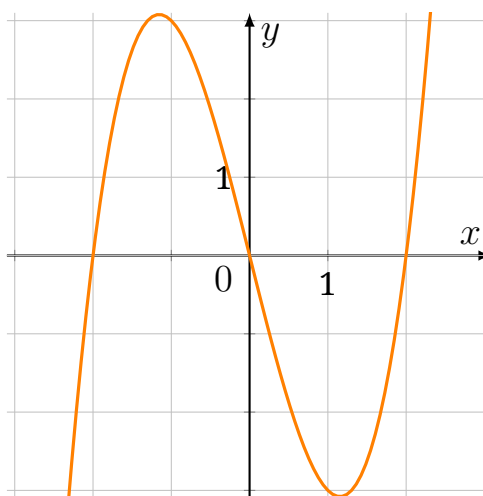


Рис. 5.1: Нули $y = x(x^2 - 4)$ в $x = -2, 0, 2$

5.2 Экстремумы

Формулировка

Экстремумы — точки максимума или минимума, где производная $f'(x) = 0$ или не существует, и происходит смена монотонности. Это пики (максимумы) или впадины (минимумы) графика.

Свойства и методы

- **Условие экстремума:** По теореме Ферма, если x_0 — точка экстремума и $f'(x_0)$ существует, то $f'(x_0) = 0$.
- **Монотонность:** Если $f'(x) > 0$, функция возрастает; если $f'(x) < 0$, убывает. Точка x_0 , где f' меняет знак, — экстремум.
- **Для парабол:** $y = ax^2 + bx + c$ имеет вершину в $x = -\frac{b}{2a}$. Если $a > 0$, то вершина — минимум; если $a < 0$, то вершина — максимум.
- **В ЕГЭ:** Задание 12 требуют находить экстремумы через производную и таблицу знаков f' . Например, определить точку минимума/максимума функции или найти значение $f(x)$. Задание 8 — анализ графика на экстремумы.
- **Таблица знаков:** Построение таблицы для f' помогает определить интервалы возрастания/убывания и точки экстремума (общий анализ функций).

Экстремумы определяют наивысшие и наименьшие значения функции на интервалах.

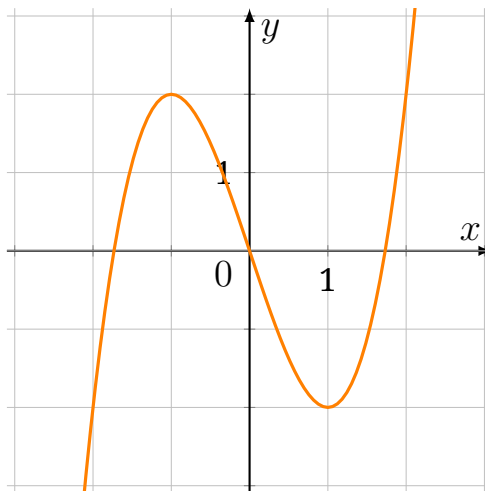


Рис. 5.2: Экстремумы $y = x^3 - 3x$ такие: $x_{\min} = 1$, $x_{\max} = -1$

5.3 *Асимптоты

Формулировка

Асимптота — линия, к которой график функции приближается при $x \rightarrow a$ или $x \rightarrow \pm\infty$. Различают:

- **Вертикальная:** $x = a$, если $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$.
- **Горизонтальная:** $y = b$, если $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$.
- **Наклонная:** $y = kx + m$, если $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (kx + m)) = 0$.

Свойства и методы

- Для рациональных функций $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$:
 - * **Вертикальная асимптота:** $x = a$, где $Q_m(a) = 0$ и $P_n(a) \neq 0$.
 - * **Горизонтальная асимптота:** Если степень $P_n =$ степень Q_m , то $y = \frac{a_n}{b_m}$ (отношение старших коэффициентов). Если степень $P_n < Q_m$, то $y = 0$. Если степень $P_n > Q_m$, горизонтальной асимптоты нет.
 - * **Наклонная асимптота:** Если степень $P_n = Q_m + 1$, то $y = kx + m$, где $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $m = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$.
- Для тригонометрических функций: Например, $y = \operatorname{tg} x$ имеет вертикальные асимптоты при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- В ЕГЭ обычно требуются вертикальные асимптоты (как ограничения по Ox , а горизонтальные и наклонные асимптоты практически не используются, но с ними все решать гораздо проще)
- **Поведение на бесконечности:** Анализ пределов обязателен для определения горизонтальных и наклонных асимптот.

Асимптоты описывают поведение функции вблизи особых точек и на бесконечности.

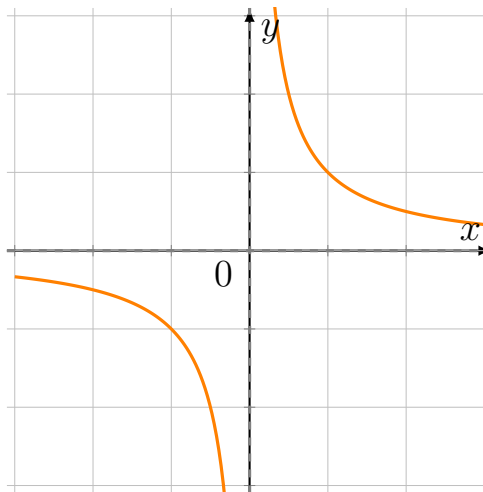


Рис. 5.3: Асимптоты $y = \frac{1}{x}$: $x = 0, y = 0$