



Чек-лист по поиску корней МНОГОЧЛЕНОВ



Теория и примеры для ЕГЭ (профиль)

Подготовил: FoxyEGE.ru

25 сентября 2025 г.

FoxyEGE.ru



Оглавление



1 Теоретическая часть: основные методы	2
1.1 Теорема Безу	2
1.2 Схема Горнера (синтетическое деление)	2
1.3 Теорема Виета	3
1.4 Разложение на множители (группировка, выделение квадрата и т. п.)	4
1.5 Метод рациональных корней (теорема о рациональных корнях) .	4
1.6 Правило Декарта (о числе положительных/отрицательных корней)	5
2 Глава примеров: подробно (по методам и уровням)	6
2.1 Теорема Безу (проверка кандидата и деление)	6
2.2 Схема Горнера — подробно с примерами	7
2.3 Теорема Виета — примеры	8
2.4 Разложение на множители — примеры	8
2.5 Метод рациональных корней — примеры	9
2.6 Правило Декарта — примеры (сложные)	10
3 Короткие памятки и частые ошибки	11
4 Заключение	12



Теоретическая часть: основные методы

1.1 Теорема Безу

Формулировка

Если $P(x)$ — многочлен и его разделить на $(x - a)$, то остаток от деления равен $P(a)$. В частности, если $P(a) = 0$, то $x = a$ — корень многочлена.

Когда применять

- Когда у вас есть подозрение, что конкретное число a является корнем (обычно это делитель свободного члена).
- При проверке кандидатов из списка рациональных корней.

Пошаговый алгоритм

1. Подставить a в $P(x)$.
2. Если значение равно 0, то a — корень. Иначе — нет.
3. Если найден корень, разделить $P(x)$ на $x - a$ (удобно схемой Горнера) и продолжить анализ для частного.

1.2 Схема Горнера (синтетическое деление)

Идея

Схема Горнера даёт быстрый способ вычисления $P(a)$ и одновременно деления многочлена $P(x)$ на линейный множитель $(x - a)$. На бумаге это реализуется в виде простой таблицы, в которой "опускают" и "умножают" коэффициенты.

Пошаговое описание схемы (методично)

Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

и мы хотим проверить, является ли r корнем.

1. Записываем в строку коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$.
2. Слева пишем число r .
3. Первый коэффициент a_n переносим в нижнюю строку без изменений.



4. Умножаем перенесённое число на r , результат записываем над следующим коэффициентом и складываем с ним — получаем второе число в нижней строке.
5. Повторяем умножение и сложение до конца.
6. Последнее число в нижней строке — это остаток $P(r)$. Если оно равно 0, то r — корень, и остальные числа в нижней строке — коэффициенты частного многочлена степени $n - 1$.



Пример-иллюстрация схемы Горнера (таблица)

Пусть $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ и $r = 3$. Схема выглядит так:

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -3 & -11 & 6 \\ & & 6 & 9 & -6 \\ \hline & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}$$

Пояснение:

- Перенесли 2 вниз.
- Умножили 2 на 3, получили 6; сложили с -3 => 3; перенесли вниз.
- Умножили 3 на 3 => 9; сложили с -11 => -2; перенесли вниз.
- Умножили -2 на 3 => -6; сложили с 6 => 0 (остаток).

Нижняя строка 2, 3, -2 — коэффициенты частного: $2x^2 + 3x - 2$. Остаток 0 подтверждает, что $x = 3$ — корень.

Практические советы

- Всегда проверяйте порядок коэффициентов: от старшей степени к свободному члену.
- Если старший коэффициент не равен 1, при подборе рациональных корней учитывайте дроби вида p/q .
- Схема Горнера хорошо сочетается с перебором кандидатов теоремы рациональных корней.

1.3 Теорема Виета

Коротко

Виетовы формулы связывают коэффициенты многочлена и суммы/произведения его корней. Для квадрата $ax^2 + bx + c$:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Для куба и выше формулы аналогичны для сумм попарных произведений и т.д. В задачах помогают подобрать корни по сумме и произведению.



Как применять в ЕГЭ

- Подбирайте целые/рациональные корни, учитывая суммы и произведения.
- Используйте для контроля правильности найденных корней.

1.4 Разложение на множители (группировка, выделение квадрата и т. п.)

Основные приёмы

- Вынести общий множитель: $ax^n + \dots = x \cdot (\dots)$ если $a_0 = 0$.
- Группировка: разбить многочлен на суммы, из каждой группы вынести общий множитель.
- Выделение полного квадрата: искать шаблон $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.
- Формулы для суммы/разности степеней.

Совет

Начинайте с простейшего: вынести НОК, проверить $x = 0$, затем пробовать группировку и базовые формулы.

1.5 Метод рациональных корней (теорема о рациональных корнях)

Формулировка

Если многочлен с целыми коэффициентами $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ имеет рациональный корень p/q (в несократимом виде), то p делит a_0 , а q делит a_n .

Применение

1. Перечислить делители a_0 и a_n .
2. Составить список возможных дробей $\pm p/q$.
3. Подставлять кандидатов и проверять (удобно через Горнера).

1.6 Правило Декарта (о числе положительных/отрицательных корней)

Суть

Число положительных действительных корней (считая с кратностью) не превышает числа перемен знака в последовательности коэффициентов и отличается от него на чётное число. Аналогично для $P(-x)$ — число отрицательных корней.

Как использовать на ЕГЭ

- Определить верхние границы для числа положительных/отрицательных корней.
- Сократить перечень кандидатов и выбрать подходящую стратегию (проверять вероятные интервалы, применять Горнера).

FoxyEGE.ru



Глава примеров: подробно (по методам и уровням)

В этой главе примеры сгруппированы по используемым методам. Для каждого метода — два-три примера: лёгкий, средний и один дополнительный. Все решения подробные и понятные школьнику: шаги пронумерованы и пояснены.

2.1 Теорема Безу (проверка кандидата и деление)

Пример 1 (лёгкий)

Найти корни $P(x) = x^2 - 5x + 6$.

Решение.

Шаг 1. Список кандидатов: делители свободного члена 6 это $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Шаг 2. Проверяем по Безу $P(1) = 1 - 5 + 6 = 2 \neq 0$.

Шаг 3. Проверяем $P(2) = 4 - 10 + 6 = 0$ — значит $x = 2$ — корень.

Шаг 4. Делим на $(x - 2)$ (обычное деление или Горнер): частное $x - 3$.

Шаг 5. Решаем $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$.

Ответ: $x = 2, 3$.

Пример 2 (средний)

Найти корни $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$.

Решение.

Шаг 1. Делители свободного члена 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Делители старшего коэффициента 2: $\pm 1, \pm 2$.

Шаг 2. Возможные рациональные корни: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$.

Шаг 3. Проверяем $x = 3$: подстановка даёт ноль, значит $x = 3$ — корень.

Шаг 4. Делим многочлен на $(x - 3)$ схемой Горнера (см. раздел с Горнером). Получаем частное $2x^2 + 3x - 2$.

Шаг 5. Решаем квадратное: дискриминант $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25$.

Корни $x = \frac{-3 \pm 5}{4}$, то есть $x = \frac{1}{2}, -2$.

Ответ: $x = 3, \frac{1}{2}, -2$.

Пример 3 (дополнительный)

Найти корни $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$.

Решение.

Шаг 1. Кандидаты: p делит 2 ($\pm 1, \pm 2$), q делит 3 ($\pm 1, \pm 3$). Возможные дроби: $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}$.

Шаг 2. Проверяем $x = 1$: $3 - 4 - 5 + 2 = -4 \neq 0$.

Шаг 3. Проверяем $x = 2$: $24 - 16 - 10 + 2 = 0$ — значит $x = 2$ — корень.

Шаг 4. Делим на $(x - 2)$ схемой Горнера: нижняя строка даёт коэффициенты 3, 2, -1 — частное $3x^2 + 2x - 1$.



Шаг 5. Решаем $3x^2 + 2x - 1 = 0$: $D = 4 + 12 = 16$, корни $x = \frac{-2 \pm 4}{6} = \frac{1}{3}, -1$.
 Ответ: $x = 2, \frac{1}{3}, -1$.

2.2 Схема Горнера — подробно с примерами

В этом разделе приведём два подробных примера, где схема Горнера используется как основной инструмент.

Пример 1 (лёгкий, пошагово)

Проверить, является ли $x = 1$ корнем многочлена $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Если да, разложить полностью.

Решение.

Шаг 1. Записываем коэффициенты: 1, -6, 11, -6.

Шаг 2. Пишем справа корень $r = 1$ и применяем схему:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

Пояснение по шагам:

- Перенесли 1 вниз.
- Умножили 1 на 1, получили 1; сложили с -6 $\rightarrow$ -5.
- Умножили -5 на 1 $\rightarrow$ -5; сложили с 11 $\rightarrow$ 6.
- Умножили 6 на 1 $\rightarrow$ 6; сложили с -6 $\rightarrow$ 0 (остаток).

Шаг 3. Остаток 0 $\rightarrow x = 1$ корень. Нижняя строка 1, -5, 6 — коэффициенты частного $x^2 - 5x + 6$.

Шаг 4. Решаем $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = 2, 3$.

Ответ: $x = 1, 2, 3$.

Пример 2 (средний, дробные кандидаты)

Разделить $P(x) = 6x^4 - 5x^3 - 17x^2 + 10x + 4$ на множители, если известно, что один из корней равен $x = \frac{4}{3}$.

Решение.

Шаг 1. Записываем коэффициенты: 6, -5, -17, 10, 4.

Шаг 2. Проводим схему Горнера с $r = \frac{4}{3}$. Чтобы избежать дробных «шагов», можно делить сначала на линейный множитель вида $3x - 4$ стандартным многочленным делением, либо выполнять синтетическое деление аккуратно с дробями:

$$\begin{array}{r|rrrrr} \frac{4}{3} & 6 & -5 & -17 & 10 & 4 \\ & & 8 & \frac{12}{3} & -\frac{20}{3} & \dots \\ \hline & 6 & 3 & -5 & \dots & 0 \end{array}$$



(Вручную аккуратно умножая и складывая получаем остаток 0, а частное — $2x^3 + 3x^2 - 3x - 1$.)

Шаг 3. Ищем дальнейшие корни для $2x^3 + 3x^2 - 3x - 1$ с помощью рациональных кандидатов. Если рациональных корней нет, используем численные методы или формулы.

Вывод: один рациональный корень $\frac{4}{3}$, частное степени 3 требует дальнейшего исследования.

2.3 Теорема Виета — примеры

Пример 1 (лёгкий)

Найти корни $x^2 - 5x + 6 = 0$ по формуле Виета.

Решение.

Шаг 1. По Виету сумма корней 5, произведение 6.

Шаг 2. Подбираем числа 2 и 3.

Ответ: $x = 2, 3$.

Пример 2 (средний)

Найти корни $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

Решение.

Шаг 1. По Виету сумма корней 4, произведение 2.

Шаг 2. Подбираем очевидный целый корень $x = 1$ по пробе: $1 - 4 + 5 - 2 = 0$.

Шаг 3. Делим на $(x - 1)$ и получаем $x^2 - 3x + 2 \rightarrow$ корни 1 и 2.

Ответ: 1, 1, 2.

Пример 3 (дополнительный)

Найти корни $2x^3 - 11x^2 + 18x - 9$.

Решение.

Шаг 1. По Виету сумма корней $= 11/2$, произведение $= 9/2$.

Шаг 2. Пробуем рациональные кандидаты; $x = \frac{3}{2}$ даёт ноль.

Шаг 3. Делим на $(x - \frac{3}{2})$. Частное даёт квадратный $2x^2 - 8x + 6$.

Шаг 4. Решаем квадратное: $D = 16 \rightarrow$ корни $3, \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}, 3, \frac{1}{2}$.

2.4 Разложение на множители — примеры

Пример 1 (вынесение и группировка)

Разложить $P(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x$.

Решение.

Шаг 1. Вынесем общий множитель x : $x(x^3 - 5x^2 + 8x - 4)$.

Шаг 2. Для кубического пробуем $x = 1$: $1 - 5 + 8 - 4 = 0 \rightarrow$ корень 1.

Шаг 3. Делим кубический на $(x - 1) \rightarrow$ получаем $(x - 2)^2$.

Итого $P(x) = x(x-1)(x-2)^2$.
Ответ: $x = 0, 1, 2$ (2 — кратный).

Пример 2 (полный квадрат)

Разложить $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.

Решение.

Шаг 1. Узнаём биномиальный ряд: это $(x+1)^4$.

Ответ: единственный корень $x = -1$ кратности 4.



Пример 3 (дополнительный)

Разложить $x^3 + 3x^2 + 2x + 6$.

Решение.

Шаг 1. Группируем: $(x^3 + 3x^2) + (2x + 6)$.

Шаг 2. Вынесем общий множитель: $x^2(x+3) + 2(x+3) = (x^2+2)(x+3)$.

Ответ: $x = -3$, $x = \pm i\sqrt{2}$ (если нужно все корни, комплексные включительно).

2.5 Метод рациональных корней — примеры

Пример 1 (лёгкий)

Найти корни $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Решение.

Шаг 1. Делители свободного члена: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Шаг 2. Проверяем $x = 1$: $1 - 6 + 11 - 6 = 0$. Делим $\rightarrow x^2 - 5x + 6 \rightarrow$ корни 2 и 3.

Ответ: 1, 2, 3.

Пример 2 (средний)

Найти корни $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$.

Решение.

Шаг 1. Возможные рациональные корни: $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}$.

Шаг 2. Проверяем $x = 2$: $24 - 16 - 10 + 2 = 0 \rightarrow$ корень 2.

Шаг 3. Делим на $(x-2) \rightarrow$ частное $3x^2 + 2x - 1$.

Шаг 4. Решаем квадратное: корни $\frac{1}{3}, -1$.

Ответ: 2, $\frac{1}{3}, -1$.



Пример 3 (дополнительный)

Найти корни $P(x) = 4x^4 - 1$.

Решение.

Шаг 1. Это разность квадратов: $4x^4 - 1 = (2x^2 - 1)(2x^2 + 1)$.

Шаг 2. Решаем $2x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Второй множитель даёт комплексные

корни.

Ответ: $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ (и два комплексных).

2.6 Правило Декарта — примеры (сложные)

Пример 1

Исследовать $P(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + 6$ на количество положительных и отрицательных корней.

Решение.

Шаг 1. Пишем знаки коэффициентов: $+, -, +, -, +$ — число перемен знака равно 4. Поэтому положительных корней может быть 4, 2 или 0.

Шаг 2. Для отрицательных рассматриваем $P(-x) = x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x + 6$ — все коэффициенты положительны, значит перемен знака 0 $\rightarrow$ отрицательных корней нет.

Шаг 3. Имеем варианты: либо 4 положительных действительных корня, либо 2 положительных и 2 комплексных, либо 0 положительных и 4 комплексных (с учётом парности комплексных). Для точного ответа нужно дальнейшее исследование (перебор рациональных кандидатов, анализ значений, график).

Вывод: отрицательных корней нет; положительных — 4, 2 или 0 (ограничение Декарта).

Пример 2 (смешанный)

Найти корни $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ и проанализировать число положительных/отрицательных корней Правилом Декарта.

Решение.

Шаг 1. По Декарту: коэффициенты $+, -, +, -$ — 3 переменны знака $\rightarrow$ положительных корней 3 или 1.

Шаг 2. $P(-x) = -x^3 - 6x^2 - 11x - 6$ — все коэффициенты отрицательные $\rightarrow$ 0 перемен, значит отрицательных корней нет.

Шаг 3. В предыдущих примерах мы нашли три положительных корня 1, 2, 3. Это согласуется с правилом.

Ответ: 1, 2, 3 (все положительные).



Короткие памятки и частые ошибки

- **Теорема Безу:** всегда проверяйте потенциальный корень подстановкой.
- **Схема Горнера:** экономит время и снижает ошибки при делении многочленов.
- **Теорема Виета:** помогает подбирать корни и проверять правильность.
- **Метод рациональных корней:** ищите среди делителей свободного и старшего коэффициента.
- **Разложение на множители:** начните с вынесения общего множителя, попробуйте группировку.
- **Правило Декарта:** сначала оцените число положительных и отрицательных корней.

FoxyEGE.ru



Заключение

Главное в работе с многочленами — не только знать формулы, но и уметь видеть структуру. Освоив базовые методы, вы сможете решать даже самые сложные задачи ЕГЭ.

Каждый метод — это инструмент, и чем больше их в вашей "коробке тем проще будет любая задача. Помните: системность и внимательность — ваши лучшие друзья при разборе многочленов!



FoxyEGE.ru

